Διάλεξη 6η Πραγματική Ανάλυση

12-11-2019

Λήμμα: Έστω x σ.σ. των συνόλων $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε το x είναι σ.σ της $\{a_n\}$

Προσοχή! Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.
π.χ $a_n = 1$

Απόδ

x σ.σ. του $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon : 0 < |a_{n_\varepsilon} - x| < \varepsilon)$

για καθε όρο της ακολουθίας

Επιλέγω $\varepsilon = 1/k \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n_k \in \mathbb{N} : 0 < |a_{n_k} - x| < \frac{1}{k})$

Με επαγωγή στο k, θδο:
$\exists n_1, n_2, \dots, n_k$ τ.ω: $0 < |a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$
και $m_1 < m_2 < \dots < m_k$.

Για $k = 1$: Έστω ότι έχουμε βρει $m_1 < \dots < m_k$.
τ.ω $|a_{m_i} - x| < \frac{1}{i}$, $i = 1, \dots, k$.

Αρκεί ναδο $\exists\, m_{k+1} > m_k$ τ.ω $0 < |a_{m_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$

Έστω ότι $\nexists$
$\Rightarrow \forall m > m_k$, είτε $|a_m - x| \geq \frac{1}{k+1}$ είτε
$|a_m - x| = 0$

Θέτω $t = \min\{|a_m - x| : a_m \neq x,\ m \leq m_k\} > 0$

Θεωρώ $\delta = \min\{t, \frac{1}{k+1}\} > 0$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$ τ.ω $a_m \neq x$ ισχύει $|a_m - x| \geq \delta \Rightarrow$
x όχι σ.σ. τ.ω $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

Άσκηση 1: iii) Θ.δ.ο. $\limsup |x_n|^{1/n} \leq \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$

Λύση

Θεωρώ $\limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = a \in [0, \infty)$: (1)

1η περίπτωση: Αν $a = +\infty$ → τέλος.

2η περίπτωση: Αν $a \in \mathbb{R}^+$

Υπενθύμιση: $\limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim \sup \left\{ \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}, k \geq n \right\}$

(1) ⇒ Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω

$\left| \sup \left\{ \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}, k \geq n \right\} - a \right| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \sup \left\{ \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}, k \geq n \right\} - a < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \ \sup \left\{ \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}, k \geq n \right\} \leq \varepsilon + a$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \ \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < a + \varepsilon$

$\frac{|x_{n+1}|}{|x_{n_0}|} = \frac{|x_{n+1}| \cdot \cancel{|x_n|}}{\cancel{|x_n|} \cdot |x_{n-1}|} \cdots \frac{|x_{n_0+1}|}{|x_{n_0}|} < (a+\varepsilon)(a+\varepsilon) \cdots (a+\varepsilon)$

$\frac{|x_{n+1}|}{|x_{n_0}|} < (a+\varepsilon)^{n-n_0+1}$

$\Rightarrow |x_{n+1}| < |x_{n_0}| (a+\varepsilon)^{n-n_0+1}$

$\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |x_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} < \underset{\downarrow \atop 1}{|x_{n_0}|^{\frac{1}{n+1}}} (a+\varepsilon)^{\frac{n-n_0+1}{n+1}} \longrightarrow (a+\varepsilon)$

$\Rightarrow \underbrace{\limsup |x_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}}_{= \limsup |x_n|^{\frac{1}{n}}} \leq a+\varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \limsup |x_n|^{\frac{1}{n}} \leq a = \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$

Άσκηση 2: (Φυλλάδιο 1)

Θέταμε $\quad a = \inf(G \cap (0,\infty))$

1η περ.: $\quad a = 0 \to$ θδο $\quad \overline{G} = \mathbb{R}$

Αρκεί νδο $\underbrace{(\forall y \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in G) : |x - y| < \varepsilon}$

Δηλαδή μπορώ να προσεγγίσω στοιχεία του G αυτό θέλω από στοιχεία του $\mathbb{R}$.

Έστω $y \in \mathbb{R}$: έστω $y > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$

επειδή $\inf(G \cap (0,\infty)) = 0 \Rightarrow$

$\exists\, x_0 \in G \cap (0,\infty)$ τ.ω $x_0 < \varepsilon$. Τότε $y = n x_0 + (y - n)x_0$

όπου $n = \left[\frac{y}{x_0}\right]$.

Όμως $\frac{y}{x_0} - 1 \leq \left[\frac{y}{x_0}\right] = n \leq \frac{y}{x_0}$

$y - x_0 \leq n x_0 \leq y \Rightarrow y - n x_0 \geq 0$ και $y - n x_0 < x_0 < \varepsilon$

$n x_0 = x_0 + \ldots + x_0 \in G$

- Αν $y > 0$: $y - n x_0 < \varepsilon$
- Αν $y = 0$ τότε $\exists\, x_0 \in G \cap (0,\infty)$ τ.ω $|0 - x_0| < \varepsilon$.
- Αν $y < 0 \to -y > 0 \Rightarrow \exists\, x \in G$ τ.ω $|-y - x| < \varepsilon$

$\xRightarrow{-x \in G} |y - (-x)| < \varepsilon$

Περίπτωση 2η: $a > 0 \to$ θδο $\quad G = \{na,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Πρώτα θδο $\quad a \in G \Big($ ⇒ Τότε το G θα περιέχει και τα ακέραια πολλαπλάσια του a $\Big)$

Έστω ότι $a \notin G$: Από τον ορισμό του inf έχουμε

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in G)$ τ.ω $\boxed{x_\varepsilon - \varepsilon < a < x_\varepsilon}$

$\Rightarrow a + \varepsilon > x_\varepsilon$ και $x_\varepsilon > a$

παίρνω $\varepsilon = a > \varepsilon$ τότε:

$\exists\, x \in G \cap (0,\infty)$ τ.ω $\left.\begin{matrix} x > a \\ x < a + a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a < x < 2a$

$\exists\, y \in G \cap (0,a)$ τ.ω $: a < y < x$
Διότι αλλιώς $\forall y \in G \cap (0,\infty) : y \geq x$
$\Rightarrow x = \inf(G \cap (0,\infty))$
Άτοπο: διότι $x > a$

$\Rightarrow 0 < \underbrace{x - y}_{\in G} \leq 2a - a = a$ → Άτοπο

$\Rightarrow a \in G \Rightarrow na \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \{na, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$: 1
Έστω $y \notin \{na, n \in \mathbb{Z}\}$
Αν y ανήκει στο $G \Rightarrow |y| \in G$
Θέτω $n = [\frac{z}{a}]$

$\Rightarrow \frac{z}{a} - 1 < n \leq \frac{z}{a}$

$\Rightarrow z - a < na < z \Rightarrow z - na > 0$ και $z - na < 0$

$z \neq na$ διότι αλλιώς $z \in \{na, n \in \mathbb{Z}\}$ → $z - na > 0$ και $z - na < 0$
Άτοπο
$\Rightarrow y \in \{na, n \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow y \notin G$

Άρα $G \subseteq \{na, n \in \mathbb{Z}\}$: 2

Άρα από 1 κ' 2 έχουμε την ισότητα $\longleftrightarrow$

Άσκηση 3 (φυλλάδιο 2)
Να βρεθούν τα σ.σ. της ακολουθίας $\{\cos n\}$

Λύση

Θεωρώ το σύνολο $G = \{n + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}\}$
Έχουμε $-n - 2\pi m \in G$ και $n_1 + 2\pi m_1 + n_2 + 2\pi m_2 \in G$ $\Longrightarrow$ Το G έχει την μορφή του συνόλου G της άσκησης (2)

Άρα είτε $\exists a \in \mathbb{R}$ τ.ω $G = \{na, n \in \mathbb{Z}\}$
είτε $\overline{G} = \mathbb{R}$

(*) όπου $a = \inf(G \cap (0, \infty))$
Όμως $\inf(G \cap (0, \infty)) = 0 \Rightarrow \overline{G} = \mathbb{R}$
Θεωρώ $f(x) = \cos x$
$\Rightarrow \overline{\underbrace{f(G)}} = [-1, 1]$

$$\{\cos(n + 2\pi m),\ n, m \in \mathbb{Z}\}$$
$$\|$$
$$\{\cos(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$$
$$\|$$
$$\{\cos(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Ορισμός: Έστω $\{f_n\}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ τότε

(i) $\{f_n\}$ λέγεται αύξουσα αν $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$
(ii) $\{f_n\}$ λέγεται φθίνουσα αν $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$
(iii) $\{f_n\}$ λέγεται μονότονη αν $\{f_n\}$ αύξουσα ή φθίνουσα.

Θεώρημα: (Dini) Αν (X, d) συμπαγής μ.χ.
$\{f_n\} \subseteq C(X)$ τ.ω η $\{f_n\}$ μονότονη και
$f_n \longrightarrow f \in C(X) \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f$

Αποδ

Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$\boxed{O_n = \{x \in X : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}} \quad : 1$$

$$\parallel$$

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

Άρα αρκεί νδο: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$: $O_n = X$: 2

Όμως: $x \in O_n \Rightarrow f(x) - f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow f(x) - f_{n+1}(x) < \varepsilon$

$\Rightarrow x \in O_n$

$\Rightarrow O_n \subseteq O_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Αρκεί νδο $\exists n_0$ τ.ω $O_{n_0} = X$

$O_n^c = \{x \in X : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$

Έστω $\{x_m\} \subseteq O_n^c$: $(n \in \mathbb{N})$ τ.ω $x_m \to y \in X$.

$\Rightarrow f(x_m) - f_m(x_m) \geq \varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{x_m \to y}$ $f(y) - f_m(y) \geq \varepsilon \Rightarrow y \in O_n^c$

$\Rightarrow O_n^c$ κλειστό $\Rightarrow$ O_n : ανοιχτό : 3

Ισχυριζόμαστε: $\boxed{X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n}$: 4

Αποδ

Έστω $x \in X$: $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow \exists n_0' \in \mathbb{N}$

τ.ω $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0'$

$\Rightarrow \underbrace{|f_{n_0'}(x) - f(x)|}_{= f(x) - f_{n_0'}(x)} < \varepsilon \Rightarrow x \in O_{n_0'} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{n_0'}$

$\xRightarrow[X:\text{ συμπαγής}]{4}$ $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ τ.ω $\bigcup_{k=1}^{} O_n = X$: 5

Θέτουμε $m = \max\{n_1, \dots, n_k\} \Rightarrow O_{n_1}, O_{n_2}, \dots, O_{n_k} \subseteq O_m$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} O_{n_i} \subseteq O_m \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω $O_m = X$.

Απόσταση 2 συνόλων: $A, B \subseteq X$: $d(A,B) = \inf\{d(x,y),\ x \in A,\ y \in B\}$

Λήμμα: Αν A, B κλειστά $\subseteq X$, A συμπαγές και $A \cap B = \emptyset \Rightarrow d(A,B) > 0$

Παράδειγμα: $X = (3, 11)$, $A = \mathbb{N}$, $B = \{n + \frac{1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\}$

$A', B' = \emptyset \Rightarrow A, B$ κλειστά και $A \cap B = \emptyset$

$d(A,B) = ;$

Έχουμε $d(n, n + \frac{1}{n+2}) = |n - n - \frac{1}{n+2}| \to 0$

$\Rightarrow d(A,B) = 0$: και όχι το συμφωνο με το Λήμμα διότι κανένα απ' τα 2 σύνολα δεν είναι συμπαγή $\Rightarrow$ ΣΥΜΠΑΓΕΙΑ (σημαντ. ρόλο)

Απόδειξη Λήμματος:

Έστω ότι $d(A,B) = 0 \Rightarrow \{x_n\} \subseteq A$, $\{y_n\} \subseteq B$ τ.ω $d(x_n, y_n) \to 0$

$\xrightarrow{A \text{ συμπαγές}} \exists$ υπακολουθία: $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ και $x \in A$ τ.ω $x_{k_n} \to x$

Όμως: $d(y_{k_n}, x) \leq d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) \to 0$

$\to y_{k_n} \to x \xRightarrow{B \text{ κλειστό}} x \in B \to$ (ΑΤΟΠΟ)

Ορισμός: Ο (X,d) λέγεται τοπικά συμπαγής αν $\forall x \in X$, $\exists r_x > 0$ τ.ω $B(x, r_x)$: συμπαγής

Παράδειγμα: $X = \mathbb{R}$ και $d(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$
Ελέγχω αρχικά αν d μετρική και ελέγχω συγκεκριμένα την 3η ιδιότητα
↳ $d(x,y) + d(y,z) \geq |x-z| \geq \min\{|x-z|, 1\}$

Θδο είναι τοπικά συμπαγής:
Έστω $x \in \mathbb{R}$. $B(x, 1/2) = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) =$
$\{x - 1/2, x + 1/2\}$: συμπαγή

$\overline{B(x,2)} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$: μη συμπαγές.